Soluție

1.a) Notând cu A matricea sistemului, rezultă $\det A = m^2(m-1)$. Sistemul admite soluție unică dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, adică $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

b) Dacă $m = 0$ rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 1$ şi $\operatorname{rang} \overline{A} = 2$.

Pentru $m = 1$ rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 2$ şi $\operatorname{rang} \overline{A} = 3$.

c) Fie $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ o soluție a sistemului; atunci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Scăzând a doua ecuație a sistemului din a treia, rezultă că $x_0 - y_0 + (m+1) z_0 = 1$. Din prima ecuație, conduce la $mz_0 = 0$ deci $z_0 = 0$. Rezultă $x_0 - y_0 = 1$, deci $x_0 - y_0 + 2009 z_0 = 1$.

2.a) $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

b) Din tabla adunării elementelor din H, rezultă că dacă $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$ atunci $x = y = \hat{0}$.

c) Se verifică relația $A \cdot B \in G$ pentru orice $A, B \in G$.

Asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$, iar elementul neutru este $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, condiția $a \neq \hat{0}$ sau $b \neq \hat{0}$ este echivalentă cu $\det A \neq \hat{0}$, conform punctului anterior.

Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, cu $c = (\det A)^{-1} \cdot a$, $d = (\det A)^{-1} \cdot (-b)$.